

基于 Wigner-Hough 变换的多分量 LFM 信号 检测及离散计算方法

孙晓昶, 皇甫堪

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘 要: Wigner-Hough 变换对 LFM 信号有压缩和聚焦的作用, 这种作用的又具有阈值特性, 本文简述 Wigner-Hough 变换的方法及对该方法的评价. 重点讨论 Wigner-Hough 变换的离散计算, 提出了一种对 Wigner 变换的结果再进行 Hough 变换的类似二维搜索的离散计算方法.

关键词: Wigner 变换; Hough 变换; 线性调频信号; 信噪比

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 02-0241-04

Discrete Algorithm for Wigner-Hough Transform Based Multicomponent LFM Signal Detection

SUN Xiao-chang, HUANGFU Kan

(College of Electronical Science and Engineering, National Univ. of Defence Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Method of LFM signal detection by Wigner Transform and its evaluation is presented. A discrete algorithm is devised here for this method and multicomponent LFM simulation proved its expected performance.

Key words: Wigner transform; Hough transform; LFM signal; signal to noise ratio

1 Wigner - Hough 变换简介

1.1 应用背景简介

LFM(chip)信号在信号分析中有独特的作用, 它在需要干扰抑制的场合有令人满意的效果. 典型的应用是 SAR 和 IS-AR 的运动目标成像, 目标和雷达之间的相对运动会在接收信号的相位上引入一个相位调制. 在方位压缩之前, chip 形式的接收信号的两个相位参数反映了目标的运动情况, 运动目标的聚焦和定位计算, 要求准确了解 chip 信号的这两个参数.

时频分析是非平稳信号的常用分析方法, LFM 信号的 Wigner 分布为背鳍状、直线型. Hough 变换是图像处理中用于直线检测的方法. 因此两种方法结合, 即在时频平面上对 Wigner 变换的结果再进行 Hough 变换, 必然能够得到 LFM 信号的特征量. 白噪声中信号的一般检测方法是匹配滤波, 对于白噪声中的 LFM(chip) 信号, 在信号参数 ω_0 和 g_0 未知情况下, 无法设置固定的匹配滤波器. Wigner-Hough 变换是一种直线积分的投影变换, 它相当于对 Wigner 变换的结果作线性相干积累, 适用于加性白噪声中 LFM 信号的检测.

如果信号中存在多个 LFM 分量, 各分量之间的交叉项会使时频平面变得模糊不清, 特别是在信噪比不高的场合, 难于发现各个 LFM 信号分量. 核函数方法可以对 Wigner 分布的

交叉项起到平滑抑制作用, 但对交叉项抑制的同时, 信号项的时频聚集性也会有所下降. Wigner-Hough 变换在时频平面沿相应直线对其 Wigner 分布作积分, 会起到一种压缩和聚焦的作用. 图 1、图 2 给出了两个例子, 具体说明了 Wigner-Hough 变换这种作用. 图 1 可以看出在信号的 Wigner 分布图上, 两个 LFM 信号淹没于噪声之中, 而 Wigner-Hough 变换图上信号以较高信噪比出现于相应位置. 图 2 的特点是两分量中有一个

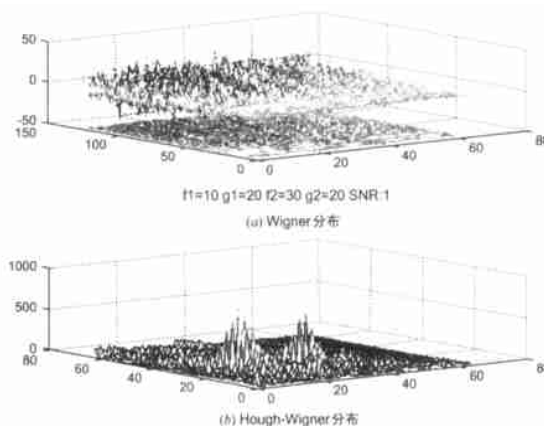


图 1 具有相同调制斜率而基频不同的两个 chip 信号的 Wigner 分布和 Hough-Wigner 分布

分量具有负的调频率. LFM 信号在 Wigner 变换后的时频平面上是一条直线,但在 Wigner-Hough 变换后的时频图是一个点,而且该点的横坐标即为基频,纵坐标为调频率.

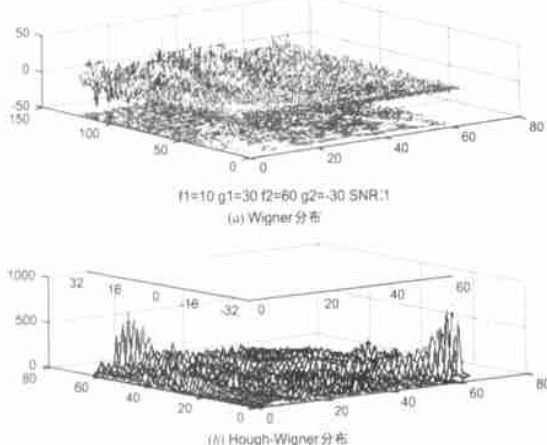


图2 正负不同调制斜率且基频不同的两个 chirp 信号的 Wigner 分布和 Hough-Wigner 分布

1.2 Wigner-Hough 变换定义

给定能量有限信号 $s(t)$, 定义 WHT 为时域到 (f, g) 参数域的映射:

$$WH_s(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t + t/2) s^*(t - l/2) e^{-j2\pi(f + g)t} dt dl \quad (1)$$

此定义式可以理解为是对 WVD 进行线性积分, 如下式表达:

$$\begin{aligned} WH_s(f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, v) \delta(v - f - gt) dt dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, f + gt) dt \end{aligned} \quad (2)$$

在模糊域上, 可以理解为信号的模糊函数过原点的“切片”的傅立叶变换:

$$WH_s(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(l, gl) e^{-j2\pi fl} dl \quad (3)$$

以上式(2)、(3)中信号 $s(t)$ 的 WVD 及 AF 定义如下:

$$\begin{aligned} W_s(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t + l/2) s^*(t - l/2) e^{-j2\pi fl} dl \\ A_s(l, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t + l/2) s^*(t - l/2) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 Wigner-Hough 变换时域离散化的一般形式

WHD 的时域离散化有多种形式, 按其连续时间定义的直接离散化形式为:

$$\begin{aligned} WH_s(f, g) &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k=-N-1}^n s(n+k) s^*(n-k) e^{-j4\pi k(f+g)} \\ &+ \sum_{n=-N/2+1}^{N-1} \sum_{k=-N-1}^{N-1-n} s(n+k) s^*(n-k) e^{-j4\pi k(f+g)} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $n=0, 1, \dots, N-1$.

2 基于 Wigner-Hough 变换的 LFM 信号的检测及方法评价

2.1 Wigner-Hough 变换下的 LFM 信号的检测原理

设 LFM 信号 $s(n) = Ae^{j2\pi(f_0 n + \frac{1}{2} g n^2) + j\phi_0}$ 在加性白噪声

$v(n)$ 中被观测, 即 $x(n) = s(n) + v(n)$. 讨论 Wigner-Hough 变换下, 输入信噪比和输出信噪比的关系问题.

如果只有信号 $s(n)$ 而不存噪声, $WH_s(f, g)$ 在 (f, g) 平面中只有一个尖峰, 峰值位于 (f_0, g_0) 处. 对于观察序列 $x(n) = s(n) + v(n)$, (f_0, g_0) 处的 $WH_s + v(f, g)$ 会发生随机起伏, 有一定的起伏方差 $\text{var}\{WH_s + v(f_0, g_0)\}$, 定义 $WH_s(f, g)$ 的输出信噪比为:

$$SNR_{out} = \frac{|WH_s(f_0 + g_0)|^2}{\text{var}\{WH_s + v(f_0 + g_0)\}} \quad (6)$$

设噪声的自相关函数为 $r_v(k) = \sigma_n^2 \delta(k)$. 为了计算分母的方差, 先计算期望值.

$$\begin{aligned} E\{|WH_s + v(f_0 + g_0)|^2\} &= \sum_n \sum_k E\{[s(n+k) + v(n+k)] [s^*(n-k) + v^*(n-k)]\} e^{-j4\pi k(f_0 + g_0)} \\ &= \frac{N^2 A^2}{2} + \sum_n \sum_k \sigma_n^2 \delta(2k) e^{-j4\pi k(f_0 + g_0)} \\ &= \frac{N^2 A^2}{2} + N \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (7)$$

设 $s_1 = s(n+k)$, $s_2 = s(n-k)$, $s_3 = s(m+i)$, $s_4 = s(m-i)$, $v_1 = v(n+k)$, $v_2 = v(n-k)$, $v_3 = v(m+i)$, $v_4 = v(m-i)$, $\Phi(n, k, m, i) = 4\pi[(k-i)f_0 + (kn-im)g_0]$. 利用零均值复高斯随机变量的矩性质, 可得 $WH_s + v(f, g)$ 的二阶矩为:

$$\begin{aligned} E\{|WH_s + v(f_0 + g_0)|^2\} &= \sum_n \sum_k \sum_m \sum_i E\{(s_1 + v_1)(s_2^* + v_2^*)(s_3 + v_3)(s_4^* + v_4^*)\} e^{-j\Phi(n, k, m, i)} \\ &= \sum_n \sum_k \sum_m \sum_i [E\{s_1 s_2^* s_3 s_4^*\} + E\{s_1 s_2^* v_3 v_4^*\} + E\{s_1 s_3 v_2^* v_4^*\} \\ &+ E\{s_2^* s_4 v_1 v_3^*\} + E\{v_1 v_2^* v_3^* v_4^*\} + E\{v_1 v_3^* v_2^* v_4^*\}] e^{-j\Phi(n, k, m, i)} \end{aligned} \quad (8)$$

利用直接代入法可得:

$$E\{|WH_s + v(f_0 + g_0)|^2\} = \frac{N^4 A^4}{2} + \frac{3N^3 A^2 \sigma_n^2}{2} + \frac{3N^3 \sigma_n^4}{2} \quad (10)$$

根据式(10)与(7)可得:

$$\text{var}\{WH_s + v(f_0 + g_0)\} = \frac{N^3 A^2 \sigma_n^2}{2} + \frac{N^2 \sigma_n^4}{2} \quad (11)$$

只有信号时 Wigner-Hough 变换的极大值等于 $N^2 A^2 / 2$, 综合式(6)与(11)可将输出信噪比表示为输入信噪比的函数.

$$SNR_{out} = \frac{\frac{N^4 A^4}{4}}{\frac{N^3 A^2 \sigma_n^2}{2} + \frac{N^2 \sigma_n^4}{2}} = \frac{\frac{N^2}{2} SNR_{in}^2}{NSNR_{in} + 1} \quad (12)$$

根据式(12), 当输入信噪比高 ($SNR_{in} \gg 1$) 时, 有 $SNR_{out} = NSNR_{in}$; 反之, 在信噪比低 ($SNR_{in} \ll 1$) 时, 分母中 $NSNR_{in}$ 的可忽略不计, 因此有 $SNR_{out} \approx N^2 SNR_{in}^2 / 2$, 即输出信噪比比输入信噪比还要低, 这是取模平方的非线性变换的一般规律. 因此找到信噪比改善和恶化的转折点 (输入信噪比门限) 是有用的. 由式(12)可以看出, 门限处应满足 $NSNR = 1$, 即 Wigner-Hough 变换对信噪比有改善所需要的最低输入信噪比为 $SNR_{in} = 1/N$. 因此数据长度 N 影响信噪比, 增加数据长度可以改善信噪比.

2.2 Wigner-Hough 变换下的 LFM 信号的检测方法评价

对于白噪声环境中的信号,其 WHT 可以写为只依赖于信号的有用项 $H_s(f, g)$ 与只依赖于噪声的干扰项 $\delta H(f, g)$ 之和. 在噪声存在的情况下, $WH_{s+v}(f, g)$ 的最大值移动到了 $(f_0 + \delta f, g_0 + \delta g)$. 可以证明至少在一阶近似的情况下,这种估计是无偏的^[3],且方差表示式为:

$$\sigma_f^2 = \frac{3(7+8N)N}{\pi^2 N^2 (N^2 - 4) (N^2 - 1)} \left(\frac{1}{SNR} + \frac{2}{NSNR^2} \right)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{90N}{\pi^2 N^2 (N^2 - 4) (N^2 - 1)} \left(\frac{1}{SNR} + \frac{2}{NSNR^2} \right)$$

在这种情况下与克拉-美罗下界作比较可知此方法是渐进有效的^[3].

3 离散计算方法

Wigner-Hough 变换的离散计算是一个复杂的问题. Wigner 变换是信号时变自相关函数的傅立叶变换,离散信号 $f(n)$ 的时变自相关函数定义为:

$$k_f(n, \tau) = f\left(n + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(n - \frac{\tau}{2}\right) \quad (13)$$

式中 $n \in Z, \tau \in Z, (n + \tau/2) \in Z$, 其中 $Z =$ 整数集, $Z_{1/2} =$ 整数集 + 0.5.

n 和 τ 的关系是: $n \in Z$ 时, τ 只在偶数点有值; $n \in Z_{1/2}$ 时, τ 只在奇数点有值. 因此 Wigner 变换的离散计算的一种方法就是先对离散信号 $f(n)$ 进行基 2 插值, 然后计算其时变自相关函数的傅立叶变换. 基 2 插值的结果是造成频域展宽 2 倍, 对信号的输入带宽提出更高要求. 在此基础上的时域离散化造成信号 Wigner 分布的频域延拓, 对于实信号的频率要求是, 最高频率不能超过时域采样频率的 1/4, 对于解析信号, 最高频率不能超过时域采样频率的 1/2. 在实际应用中要求过采样.

Wigner-Hough 变换相当于对信号 Wigner 分布的一种直线积分, 会在时域引入与频率成正比的色散群延迟, 使原信号的时频分布向右倾斜, 即原信号的矩形支撑区变为菱形, 而正频率信号的时间边缘特性随之伸展, 边缘特性的伸展会与相邻周期发生混叠, 如图 3 所示.

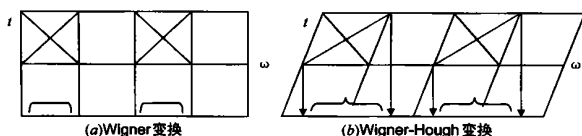


图 3 Wigner 变换的矩形支撑区和

Wigner-Hough 变换的菱形支撑区

式(5)所示的 Wigner-Hough 变换时域离散化方法有两个缺点: 一是频域的延拓造成的混叠情况不易说明; 二是计算的循环嵌套层次高, 计算量大大增加. 这个问题本质上是一个二维搜索问题, 可以分离进行, 可先对信号进行 Wigner 变换, 然后在时频平面上对 Wigner 变换的结果沿直线 $\omega = \omega_0 + g_0 t$ 对 t 积分, 对 ω_0 和 g_0 进行二维搜索.

其中离散 Wigner 变换按下式进行:

$$W_s(n, k) = \begin{cases} \sum_{\tau=-n+1}^{n-1} s(n+\tau) s^*(n-\tau) e^{-j4\pi k \tau}, & 1 \leq n \leq N/2 \text{ and } 1 \leq k \leq N \\ \sum_{\tau=n-N}^{N-n} s(n+\tau) s^*(n-\tau) e^{-j4\pi k \tau}, & N/2+1 \leq n \leq N \text{ and } 1 \leq k \leq N \end{cases} \quad (14)$$

直线积分为直线离散求和时, g 取值范围的应作考虑, 为了避免极值点 $\pm \infty$ 出现. 参数 g_0 的取值范围可分为 $|g_0| \leq 1$ 和 $|g_0| \geq 1$. 当 $|g_0| \leq 1$ 时沿直线 $f = f_0 + g_0 n/N$ 对 n 求和:

$$WH_s(f_0, g_0) = \sum_{n=-N}^N W_s(n, f_0 + g_0 n/N), \quad (1 \leq f_0 \leq N) \text{ and } (-1 \leq g_0 \leq 1) \text{ and } (1 \leq f_0 + g_0 n/N \leq N) \quad (15)$$

当 $|g_0| \geq 1$ 时沿直线 $t = t_0 + c_0 n/N$ 对 n 求和, 然后以 $g_0 = -1/c_0, f_0 = t_0 g_0 N$ 得到 g_0, f_0 .

$$WH_s(t_0, c_0) = \sum_{n=-N}^N W_s(t_0 + c_0 n/N, N), \quad (1 \leq t_0 \leq N) \text{ and } (-1 \leq c_0 \leq 1) \text{ and } (1 \leq t_0 + c_0 n/N \leq N) \quad (16)$$

4 仿真计算

设 chirp 信号的时域模拟形式 $s(t) = Ae^{j2\pi(f_0 t + \frac{1}{2} g_n^2 t^2) + j\phi_0}$. 因不影响实验结果, 进行离散化处理时, 可不考虑 chirp 信号的初始相位, 另外把信号取单位幅度, 则

$$s(n+k) = \sup(0, N) e^{j2\pi(f_1 + g_1 n)k} + \sup(0, N) e^{j2\pi(f_2 + g_2 n)k} + \sup(0, N) e^{j2\pi(f_3 + g_3 n)k} + \sup(0, N) e^{j2\pi(f_4 + g_4 n)k}$$

(同时观察四个 chirp 信号)

噪声源 $n(n)$ 取零均值高斯白噪声, 单位方差. 实验中输入信噪比的改变是通过改变噪声方差来实现的, 即 $v(n) = \text{coef} \cdot n(n)$, 输入信噪比为 $1/(\text{coef} \cdot \text{coef})$, 参数 coef 可设. 实验结果见图 4.

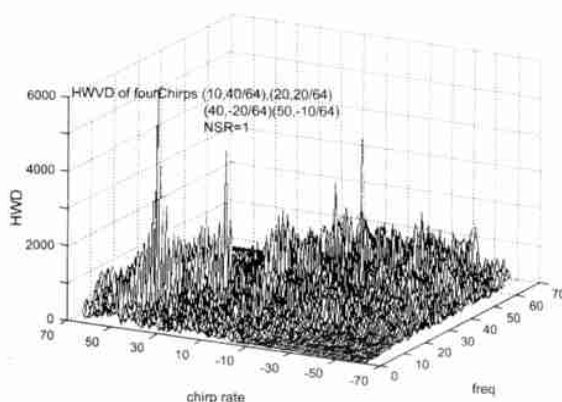


图 4 含有四个 chirp 的信号的 HWD 变换

用于实验的信号中含有四个 chirp: $(10, 40/N), (20, 20/N), (40, -20/N), (50, -10/64)$, 信噪比为 1. Wigner-Hough 变换后, 各 chirp 在图中的相应的位置以冲激形式出现, 每个冲激的横坐标对应于该 chirp 的起始频率, 纵坐标对应于 chirp 调频率. 四个冲激的输出幅度不一致, 是因为 Wigner 变换是

双线性的,变换后未在时频平面上作交叉项消除的处理,而后的 Hough 变换又沿不同的路径积分,是以造成输出幅度的不一致.

5 总结

(1) 本文的 Wigner-Hough 变换离散计算方法与直接的 Wigner-Hough 变换时域离散化方法相比,由于循环嵌套层减少,计算量上减少约 N^2 倍,而性能不受影响.

(2) 与 DCFT(Discrete Chirp Fourier Transform) 法^[1]相比, Wigner-Hough 变换不需要采样点是素数的前提,对输入信噪比的要求较低.与一般的 DPT(Discrete Polynomial Phase Transform)、迭代法^[2]、最大似然估计法等相比, Wigner-Hough 变换的显著优势是可以同时估计多个 chirp 成分,对输入信噪比的要求较低,估计的性能好.但是 Wigner-Hough 变换计算量大,具体应用时还要有一个虚警门限问题,还要相应增大计算量.另外, Wigner-Hough 变换为了避免频谱混叠,要求对信号过采样,这使它上面提到的方法相比,显得逊色.

(3) 在信号中的 chirp 成分增多时,检测效果明显下降.因此在一定的噪信比下,该方法能够检测的 chirp 成分是否有上限,怎样分析这一上限,这一问题目前有待解决.

参考文献:

- [1] Xiang-Gen Xia. Discrete chirp Fourier transform and its application to chirp rate estimation[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2000, 48: 3122 - 3133.
- [2] M Z Ikram, K Abed. Merain, Y Haa. Estimating the parameters of chirp signals: An iterative approach[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1998, 46: 3436 - 3441.
- [3] S Barbarossa. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined wigner-hough transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1995, 43: 1511 - 1515.
- [4] P M Djarić, S M Kay. Parameter estimation of chirp signals[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1990, 38(6): 2118 - 2126.
- [5] L Cohen. Time-Frequency Analysis: Theory and Application[M]. Prentice House, 1997.
- [6] 张贤达, 保铮. 非平稳信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [7] 杨福生. 随机信号分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [8] 郭强, 陈桂林, 童卫旗. 基于变换域 Hough 变换的遥感图象相干干扰分析[J]. 光学精密工程, 2001, 9(2): 121 - 126.

作者简介:



孙晓昶 男, 1966 年 6 月出生于河南安阳市, 国防科技大学电子科学与工程学院在读博士生, 专业为信息与通信工程, 现研究方向为阵列信号处理、联合空时处理.

皇甫堪 男, 1939 年 4 月出生于上海, 国防科技大学电子科学与工程学院教授、博士生导师, 电子学会高级会员、中国宇航学会信息与计算机应用委员会委员, 主要从事测速雷达、数字信号处理及应用技术等方面的研究, 先后获得全国科学大会奖 1 项, 部委级 1 等奖 1 项, 部委级 2 等奖 5 项, 已出版教材 1 部, 在国内外重要刊物及会议上发表学术论文 40 余篇.